Лекция №3
Нечеткие множества и нечеткая логика

Носитель и высота

Носителем нечеткого множества ***A*** называется четкое множество ***supp A*** таких точек в ***U***, для которых величина $\boldsymbol{\mu_A(x)}$ положительна, т.е.

$$supp\ A=\{x \mid \mu_A(x)>0\}$$

Высотой нечеткого множества ***A*** называется верхняя граница его функции принадлежности.

$$\sup_U \mu_A(x)$$

Для дискретного универсального множества ***U*** супремум становится максимумом, а значит высотой нечеткого множества будет максимум степеней принадлежности его элементов.

Нормальное нечеткое множество

Нечеткое множество ***A*** называется **нормальным**, если

$$\sup_{U} \mu_A(x) = 1$$

В противном случае оно называется **субнормальным**.

Нечеткое множество называется **пустым**, если $\forall x \in U(\mu_A(x)=0)$.

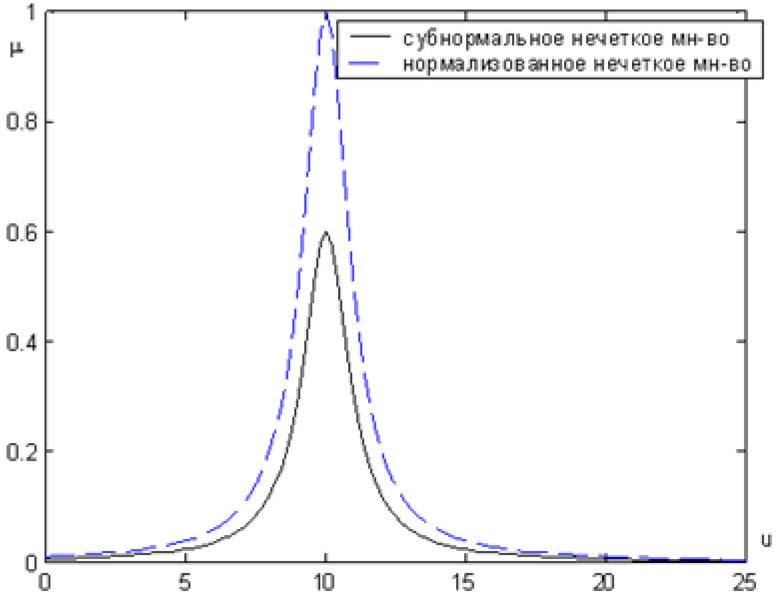
Субнормальное нечеткое множество

Непустое субнормальное нечеткое множество можно привести к нормальному (нормализовать) по формуле:

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_{U} \mu_A(x)}.$$

Нормализация функция принадлежности

Нормализация нечеткого множества $\tilde{A}$ с функцией принадлежности



$$\mu_{A'}(u) = \frac{0.6}{1 + (10 - u)^2}$$

Ядро

Ядром нечеткого множества $\tilde{A}$ называется четкое подмножество универсального множества U, элементы которого имеют степени принадлежности равные единице.

$$core(A)=\{x \mid \mu_A(x)=1\}$$

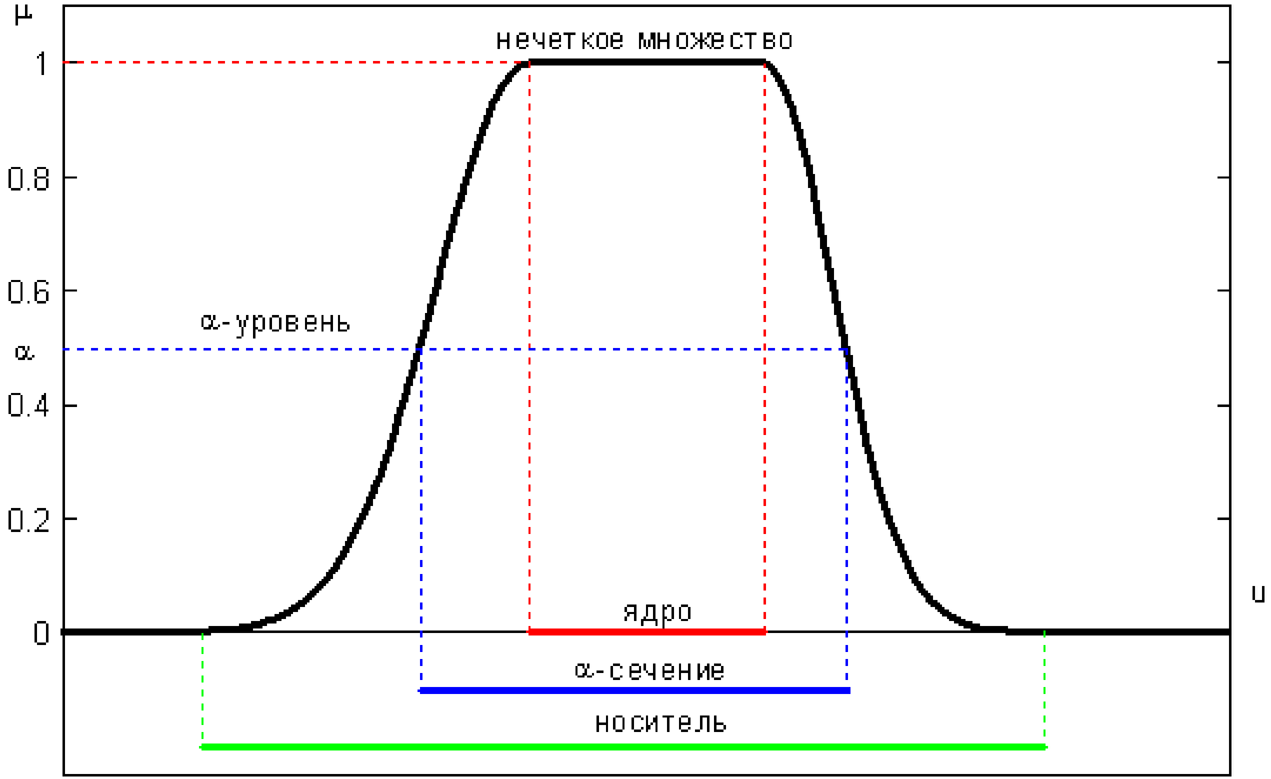
Ядро субнормального нечеткого множества пустое.

Срез

Множеством уровня α (α-срезом, α-сечением) нечеткого множества ***A*** называется четкое подмножество универсального множества ***U***, определяемое по формуле:

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\},\ \alpha \in [0,1]$$

Пример



μ
нечеткое множество
1
0.8
0.6
α-уровень
α
0.4
0.2
0
u
ядро
α-сечение
носитель

Точка перехода

- Множество строгого уровня определяется в виде $A_{\alpha}=\{x|\ \mu_A(x)>\alpha\}$. В частности, носителем нечеткого множества является множество элементов, для которых $\mu_A(x)>0$.
- **Точка перехода** нечеткого множества A — это такой элемент $x \in U$, для которого $\mu_A(x)=0.5$.

Четкое множество

- **Четкое множество *A****, ближайшее к нечеткому множеству ***A***, определяется следующим образом:

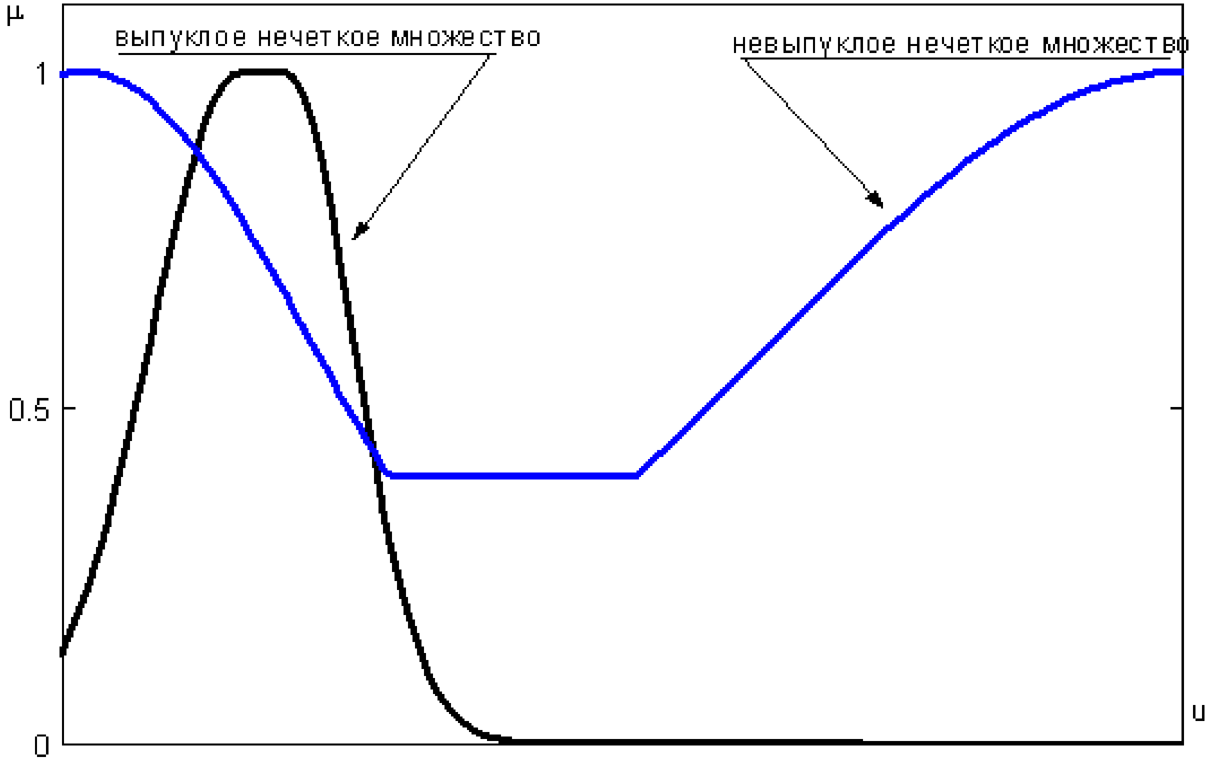
$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0,5; \\ 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0,5; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выпуклое множество

- Нечеткое множество A в пространстве $U=R_n$ называется **выпуклым** нечетким множеством тогда и только тогда, если его функция принадлежности выпукла, т.е. для каждой пары точек x и y из U функция принадлежности удовлетворяет неравенству

$$\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\},\ \text{для любого}\ \lambda\in[0,\ 1]$$

Пример


μ
выпуклое нечеткое множество
невыпуклое нечеткое множество
1
0.5
0
u

Операции

- Объединение

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

- Пересечение

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

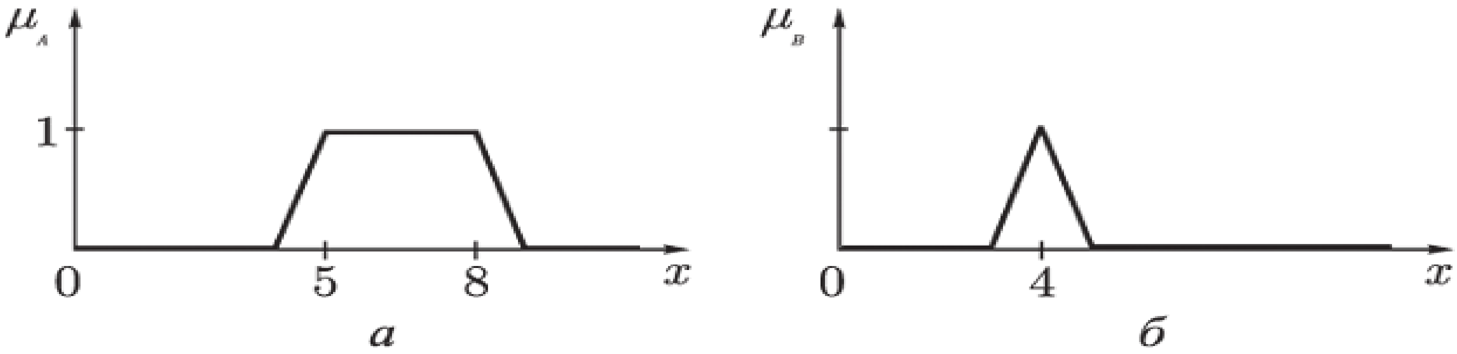
- Дополнение

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x),$$

$$A \cap \bar{A} \neq \varnothing, A \cup \bar{A} \neq U$$

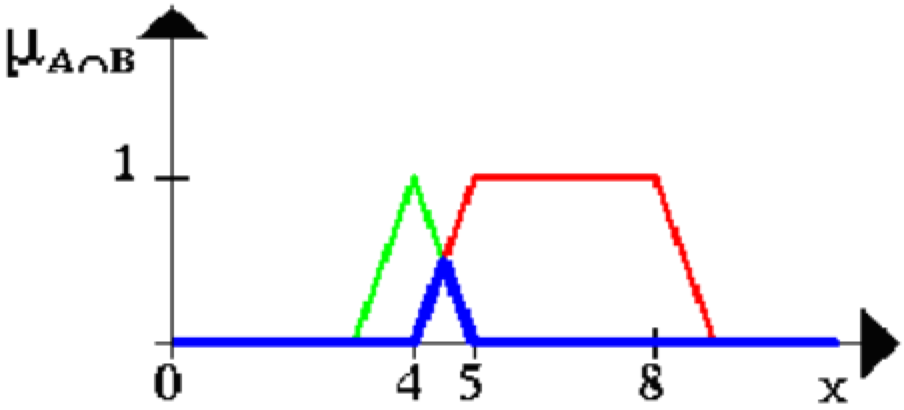
Пример

Пусть ***A*** нечеткий интервал от 5 до 8 и ***B*** нечеткое число *около* 4.



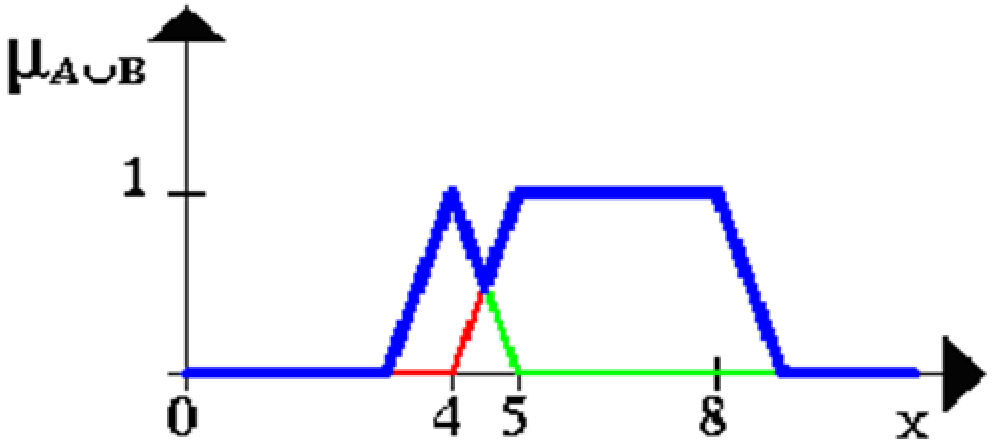
Пересечение

Нечеткое множество *между* 5 *и* 8 **И (AND)** *около* 4.



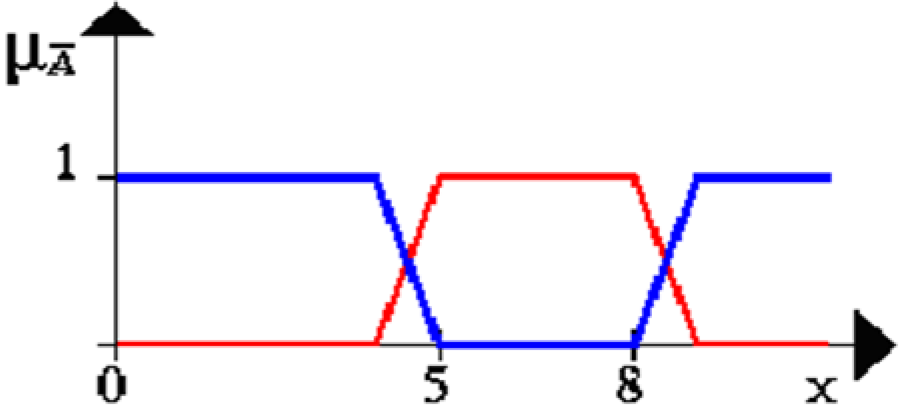
Объединение

Нечеткое множество *между* 5 *и* 8 **ИЛИ (OR)** *около* 4.



Отрицание

Синяя линия – это **отрицание** нечеткого множества *A*.



Треугольная норма

Треугольной нормой (***t-нормой***) называется бинарная операция ***T*** на единичном интервале $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам для любых ***a***, ***b***, ***c*** $\in [0,1]$:

$T(a,1)=a$ (граничное условие);

$T(a,b)\le T(a,c)$, если $b\le c$ (монотонность);

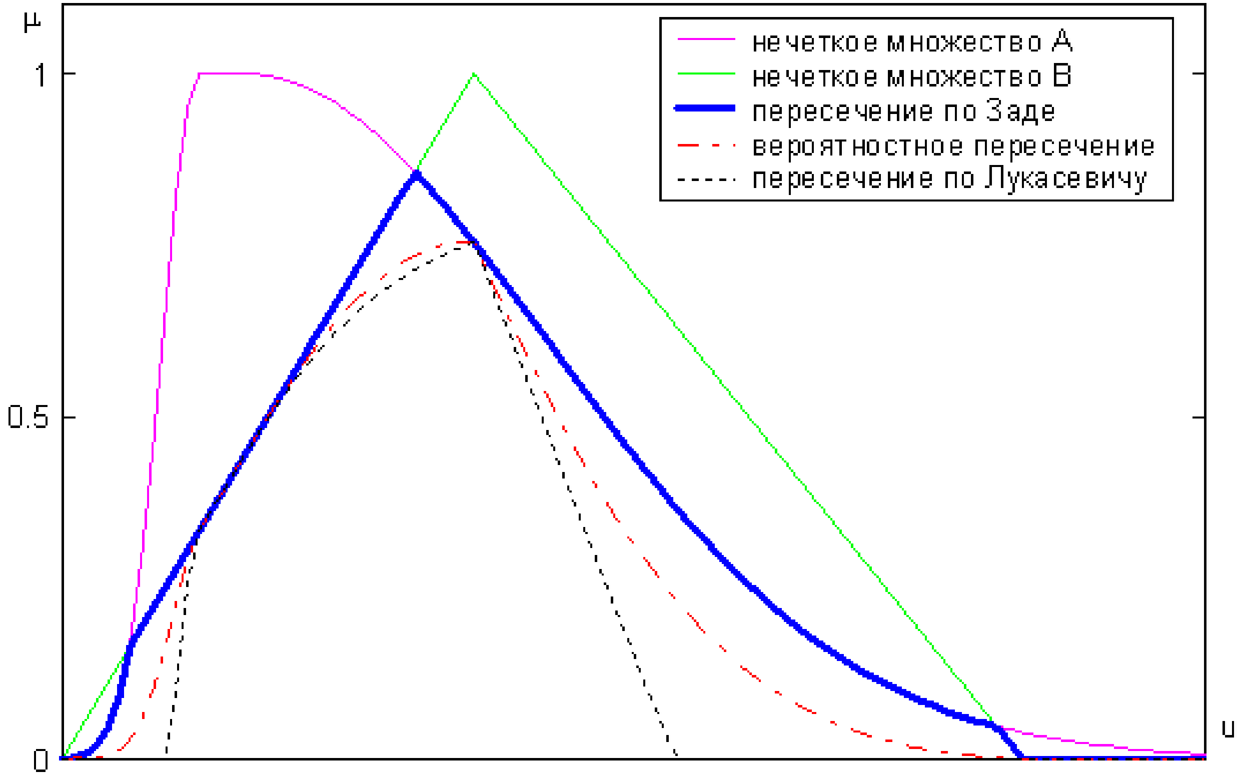
$T(a,b)=T(b,a)$ (коммутативность);

$T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$ (ассоциативность).

Наиболее часто используются такие ***t***-нормы:

- пересечение по Заде – $T(a,b)=\min(a,b)$;
- вероятностное пересечение – $T(a,b)=ab$;
- пересечение по Лукасевичу – $T(a,b)=\max(a+b-1,0)$.

Пересечение



Треугольная конорма

Треугольной конормой (***s-нормой***) называется бинарная операция S на единичном интервале $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам для любых a, b, $c \in [0,1]$:

$S(a,0)=a$ (граничное условие);

$S(a,b)\le S(a,c)$, если $b\le c$ (монотонность);

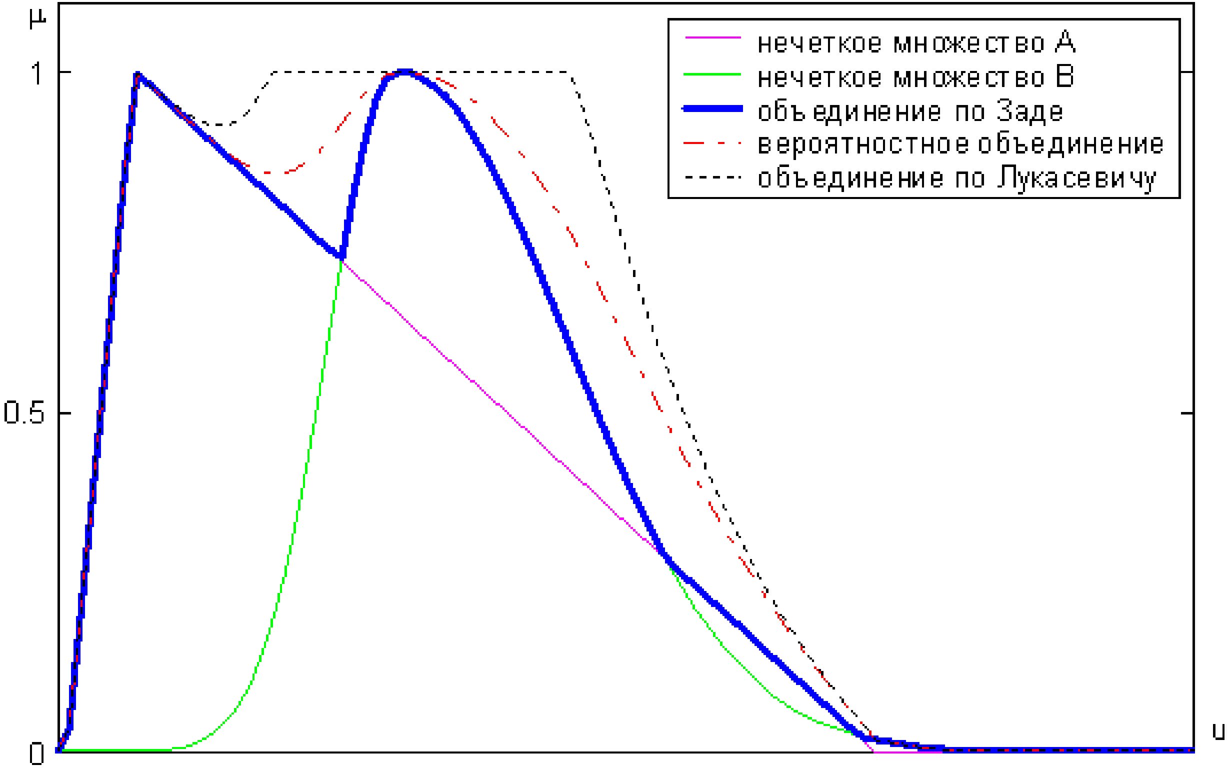
$S(a,b)=S(b,a)$ (коммутативность);

$S(a,S(b,c))=S(S(a,b),c)$ (ассоциативность).

Наиболее часто используются такие ***s-нормы***:

- объединение по Заде – $S(a,b)=\max(a,b)$;
- вероятностное объединение – $S(a,b)=a+b-ab$;
- объединение по Лукасевичу – $S(a,b)=\min(a+b,1)$.

Объединение



Включение

Пусть ***A*** и ***B*** — нечеткие множества на универсальном множестве ***U***.

Говорят, что ***A*** содержится в ***B*** (***B*** доминирует ***A***)

(***A*** ⊂ ***B***), если

$$\forall x \in U \; \mu_A(x) \leq \mu_B(x).$$

Равенство

Пусть ***A*** и ***B*** — нечеткие множества на универсальном множестве ***U***.

Говорят, что ***A*** равно ***B*** (***A* = *B***), если

$$\forall x \in U \; \mu_A(x) = \mu_B(x).$$

Концентрация и размывание

1) **CON(*A*)=*A*^{2}** – операция концентрирования (уплотнения);

2) **DIL(*A*)=*A*$^{1/2}$** – операция размывания (растяжения).